Informatique théorique III
Série 13 solution

Prof. Nestmann, 2005

1. Réduction

Déterminer pour chacun des langages suivants, s'il est décidable, semi-décidable mais non décidable, ou non-semi-décidable.

1. $L_1 = \{[M] \mid M$ ne s'arrête pour aucun mot$\}$
2. $L_2 = \{[M] \mid M \in$ MT est totale$\}$
3. $L_3 = \{[M] \mid M$ ne s'arrête pas pour au moins un mot$\}$

On pourra utiliser le résultat suivant :
$L'_H = \{[(M, w)] \mid M$ ne s'arrête pas pour $w\}$ est non-semi-décidable. □

Solution.

1. On montre que L_1 n'est pas semi-décidable en montrant que $L'_H \leq_{\text{red}} L_1$.
On définit $\sigma : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ de la façon suivante :

$$\sigma : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$$
$$x \mapsto \begin{cases} [\mathcal{M}_M^w] & \text{s'il existe une MT } M \text{ et un mot } w \text{ tel que } x = [(M, w)] \\ [M^{\text{triv}}] & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\mathcal{M}_M^w$ est la machine qui, étant donné un mot y en entrée, l'efface, écrit w à la place et se comporte comme M ensuite.
Il est clair que σ est Turing-calculable. Il reste à montrer que σ vérifie

$$\forall x \in \{0,1\}^* \,.\, x \in L'_H \Leftrightarrow \sigma(x) \in L_1$$

Soit $x \in \{0,1\}^*$
($\Rightarrow$) Supposons $x \in L'_H$. On sait alors qu'il existe M et w tel que $x = [(M, w)]$ et M ne s'arrête pas pour w. On a donc $\sigma(x) = [\mathcal{M}_M^w]$. Par construction, puisque M ne s'arrête pas pour w, $\mathcal{M}_M^w$ ne s'arrête pour aucun mot et donc $\sigma(x) \in L_1$.
($\Leftarrow$) Supposons maintenant que $\sigma(x) \in L_1$. Comme M^{triv} s'arrête pour tous les mots — et donc que $M^{\text{triv}} \notin L_1$ — nécessairement il existe M et w tel que $x = [(M, w)]$ et alors $\sigma(x) = [\mathcal{M}_M^w]$. Comme $\sigma(x) \in L_1$, on a donc que $\mathcal{M}_M^w$ ne s'arrête pour aucun mot. Par construction de $\mathcal{M}_M^w$, cela signifie donc que M ne s'arrête pas pour w et donc $x \in L'_H$.
On a donc $L'_H \leq_{\text{red}} L_1$. L'_H n'étant pas semi-décidable, on en conclut que L_1 n'est pas semi-décidable.
2. On montre que L_2 n'est pas semi-décidable en montrant que $L'_H \leq_{\text{red}} L_2$.
Soit σ la fonction telle que $\sigma([(M, w)]) = [\mathcal{M}_M^w]$ où $\mathcal{M}_M^w$ est la machine qui, étant donné un mot x en entrée, simule $|x|$ transitions de la machine M sur le mot w. Si pendant cette simulation, M s'arrête pour w alors $\mathcal{M}_M^w$ rentre dans un état où elle boucle *ad vitam eternam* et sinon $\mathcal{M}_M^w$ s'arrête. Autrement dit, la longueur du mot d'entrée x donne le nombre de pas maximum qu'on va dérouler pour exécuter M sur w.
Alors, il est clair que $\mathcal{M}_M^w$ est totale si et seulement si M ne s'arrête pas pour w. En effet, si M s'arrête pour w, elle le fait en un certain nombre d'étapes n. Alors pour tous les mots de longueur supérieure à n, $\mathcal{M}_M^w$ ne s'arrête pas et $\mathcal{M}_M^w$ n'est pas totale. Réciproquement, si $\mathcal{M}_M^w$ n'est pas totale, il existe un mot x pour lequel $\mathcal{M}_M^w$ ne s'arrête pas. Par construction, cela signifie que M s'arrête pour w en moins de $|x|$ transitions.

On a donc $L'_H \leq_{\text{red}} L_2$. L'_H n'étant pas semi-décidable, on en conclut que L_2 n'est pas semi-décidable.

3. Tout d'abord notons que $L_3 = \overline{L_2}$. Ayant démontré ci-dessus que L_2 est non-semi-décidable, L_3 ne peut pas être décidable.

   On montre que L_3 n'est pas semi-décidable en montrant que $L'_H \leq_{\text{red}} L_3$.

   Soit σ la fonction telle que $\sigma([(M, w)]) = [\mathcal{M}_M^w]$ où $\mathcal{M}_M^w$ est la machine qui, étant donné un mot x en entrée, l'ignore, simule M sur w et s'arrête si M s'arrête sur w.

   Par construction il est clair que $\mathcal{M}_M^w$ ne s'arrête pas sur toutes les entrées — et donc pour au moins un mot — si M ne s'arrête pas sur w. Réciproquement si M s'arrête sur w alors $\mathcal{M}_M^w$ s'arrête toujours.

   On a donc $L'_H \leq_{\text{red}} L_3$ et L'_H n'étant pas semi-décidable, on en conclut que L_2 n'est pas semi-décidable.

■

2. Rice

Utiliser le théorème de Rice pour montrer que les problèmes suivants sont indécidables.

1. Étant donnée une machine de Turing M, est-ce que $\mathrm{L}(M) = \emptyset$?
2. Étant donnée une machine de Turing M, est-ce que $\mathrm{L}(M)$ est fini ?
3. Étant donnée une machine de Turing M, est-ce que $\mathrm{L}(M)$ est un langage régulier ?
4. Étant donnée une machine de Turing M, est-ce que $\mathrm{L}(M)$ est un langage algébrique ?

□

Solution. On reformule ces problèmes en terme de propriétés sur $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_0$ étant par définition l'ensemble des langages reconnus par les MT.

1. Ce problème est équivalent à décider la propriété P définie par :

$$P : \mathcal{L}_0 \to \{0, 1\}$$
$$L \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } L = \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Cette propriété est non-triviale car $P(\emptyset) = 1$ et $P(\{0\}) = 0$. D'après le théorème de Rice, elle est donc indécidable.

2. Ce problème est équivalent à décider la propriété P définie par :

$$P : \mathcal{L}_0 \to \{0, 1\}$$
$$L \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } L \text{ est fini} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Cette propriété est non-triviale car $P(\emptyset) = 1$ et $P(\{0\}^*) = 0$. D'après le théorème de Rice, elle est donc indécidable.

3. Ce problème est équivalent à décider la propriété P définie par :

$$P : \mathcal{L}_0 \to \{0,1\}$$
$$L \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } L \text{ est régulier} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette propriété est non-triviale car $P(\emptyset) = 1$ et $P(\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}) = 0$. D'après le théorème de Rice, elle est donc indécidable.

4. Ce problème est équivalent à décider la propriété P définie par :

$$P : \mathcal{L}_0 \to \{0,1\}$$
$$L \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } L \text{ est algébrique} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette propriété est non-triviale car $P(\emptyset) = 1$ et $P(\{0^n 1^n 0^n \mid n \in \mathbb{N}\}) = 0$. D'après le théorème de Rice, elle est donc indécidable.

■

3. Indécidabilité[1]

Étant donné un alphabet Σ, considérons l'ensemble Υ constitué des langages semi-décidables qui contiennent *au moins* tous les palindromes de Σ^*. En d'autre termes,

$$\Upsilon \triangleq \{L \subseteq \mathcal{L}_0 \mid \mathrm{Pal}(\Sigma^*) \subseteq L\}$$

Démontrez que le problème qui consiste à déterminer si un langage $L \in \mathcal{L}_0$ appartient à Υ n'est pas décidable. Utilisez d'abord le théorème de Rice. Puis redémontrez le résultat par réduction en reformulant le problème comme une propriété à décider sur les machines de Turing.

□

Preuve. Par le théorème de Rice.
L'ensemble Υ peut être représenté par sa fonction caractérisique :

$$\Upsilon : \mathcal{L}_0 \to \{0,1\}$$
$$L \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \mathrm{Pal}(\Sigma^*) \subseteq L \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Considérons les langages $\emptyset$ et Σ^*, ce sont des langages réguliers, ils appartiennent donc à $\mathcal{L}_0$. Or nous avons $\Upsilon(\emptyset) = 0$ et $\Upsilon(\Sigma^*) = 1$. La propriété Υ n'est donc pas triviale. Par le théorème de Rice nous déduisons que Υ n'est pas décidable et donc que l'appartenance à Υ ne l'est pas non plus. ■

Preuve. Par réduction.
Les langages semi-décidables sont les langages acceptés par les machines de Turing. Le problème de l'appartenance à Υ peut donc être reformulé comme suit : est-il possible de déterminer si une une machine de Turing M accepte au moins l'ensemble des palindromes de Σ^* ? En d'autre termes, le langage suivant est-il décidable :

$$L_{\mathrm{Pal}} = \{[M] \mid \mathrm{Pal}(\Sigma^*) \subseteq \mathrm{L}(M)\}$$

[1]Inspiré d'un problème d'examen 2003/2004.

On montre L_{Pal} non-décidable par réduction du problème de l'arrêt, $L_{\text{H}} \leq_{\text{red}} L_{\text{Pal}}$.

Soit σ la fonction telle que $\sigma([(M,w]) = [\mathcal{M}_M^w]$ où $\mathcal{M}_M^w$ est la machine qui, étant donné un mot x en entrée,

Teste si l'entrée x est un palindrome de Σ^* et

1. si oui, simule M sur w et accepte si M s'arrête pour w.
2. sinon, rejette l'entrée.

par construction de $\mathcal{M}_M^w$ nous avons :

$$\mathrm{L}(\mathcal{M}_M^w) = \begin{cases} \mathrm{Pal}(\Sigma^*) & \text{si } M \text{ s'arrête pour } w \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a donc $\mathrm{Pal}(\Sigma^*) \subseteq \mathrm{L}(\mathcal{M}_M^w)$ si M s'arrête pour w. Réciproquement, si M ne s'arrête pas pour w, $\mathrm{L}(\mathcal{M}_M^w) = \emptyset$.

On a donc $L_{\text{H}} \leq_{\text{red}} L_{\text{Pal}}$ et L_{H} étant non décidable, on en conclut que L_3 est non décidable.

■