Informatique théorique III
Série 14 solution

Prof. Nestmann, 2005

1. PCP

Pour chacune des instances du PCP suivantes indiquer si elles ont une solution ou pas. Justifier.

1. $\left[\frac{01}{011}\right], \left[\frac{001}{10}\right], \left[\frac{10}{00}\right]$
2. $\left[\frac{01}{011}\right], \left[\frac{001}{01}\right], \left[\frac{10}{00}\right]$
3. $\left[\frac{ab}{bc}\right], \left[\frac{a}{ab}\right], \left[\frac{bc}{ca}\right], \left[\frac{c}{a}\right]$ □

Solution.

1. Si cette instance admet une solution, alors le premier domino utilisé est forcément $\left[\frac{01}{011}\right]$ car les deux autres dominos ne forment pas un préfixe de mot « compatible ». La seule possibilité ensuite est de prendre le domino $\left[\frac{10}{00}\right]$ (car le dernier 1 du premier domino force à prendre un domino qui commence par un 1 en haut). Ensuite, on a le choix entre le domino $\left[\frac{01}{011}\right]$ ou $\left[\frac{001}{10}\right]$.
   Le premier choix donne comme mot du haut $01 \cdot 10 \cdot 01$ et comme mot du bas $011 \cdot 00 \cdot 011$, et on voit que cela ne pourra pas être solution car aucun des deux mots n'est préfixe de l'autre.
   Le second choix donne comme mot du haut $01 \cdot 10 \cdot 001$ et comme mot du bas $011 \cdot 00 \cdot 10$, et on voit que cela ne pourra pas être solution car aucun des deux mots n'est préfixe de l'autre.
   En conclusion, cette instance n'a pas de solution.
2. Cette instance admet comme solution :
   $$\left[\frac{01}{011}\right]\left[\frac{10}{00}\right]\left[\frac{001}{01}\right]$$
   Ce qui forme le mot 0110001.
3. Cette instance n'admet pas de solution car une solution commence nécessairement par le domino $\left[\frac{a}{ab}\right]$. Ensuite, il n'est pas possible de rattraper la lettre de retard du mot du haut par rapport au mot du bas car tous les dominos de ce jeu sont tels que le mot du haut est plus court (au sens large) que le mot du bas.

■

2. PCP sur un symbole

Montrer que le PCP pour un jeu de domino (A, B) sur un alphabet comportant un unique symbole est décidable. Raisonnez sur la longueur des mots qui composent les pièces. □

Solution. Prenons (A, B) un jeu de domino de taille k sur Σ avec $\#(\Sigma) = 1$. Nous avons les cas suivants :

1. $\forall i \in [1, k] \,.\, |A(i)| > |B(i)|$.
   Le problème n'a pas de solution car nous avons pour tout $I \in [1, k]^+$, $|A\langle I\rangle| > |B\langle I\rangle|$ et donc $A\langle I\rangle \neq B\langle I\rangle$.
2. $\forall i \in [1, k] \,.\, |A(i)| < |B(i)|$.
   Symétrique au cas précédent.
3. $\forall i \in [1, k] \,.\, |A(i)| = |B(i)|$. Dans ce cas $I = 1$ est une solution car l'alphabet ne comporte qu'un seul symbole.

4. $\exists i, j \in [1, k] \,.\, |A(i)| > |B(i)| \wedge |A(j)| < |B(j)|$.
   Cela signifie qu'il existe $n, m \in \mathbb{N}^*$ avec $|A(i)| = |B(i)| + n$ et $|B(j)| = |A(j)| + m$.
   Prenons $I = i^m j^n$ nous avons

$$\begin{aligned} |A\langle I\rangle| &= m|A(i)| + n|A(j)| \\ &= m(|B(i)| + n) + n(|B(j)| - m) \\ &= m|B(i)| + n|B(j)| \\ &= |B\langle I\rangle| \end{aligned}$$

   L'alphabet ne comportant qu'un seul symbole nous avons donc $A\langle I\rangle = B\langle I\rangle$.

Dans tous les cas nous sommes capables de décider si le PCP est soluble. ∎

3. Réduction avec PCP

Montrer que le problème suivant est indécidable par réduction de PCP.
Étant donné une grammaire non-contextuelle G, existe-t-il un palindrome dans $\mathrm{L}(G)$?

Solution. Comme suggéré, on montre que le PCP se réduit au problème demandé. Soit (A, B) une instance du PCP de taille $k \in \mathbb{N}^*$ sur l'alphabet Σ. Comme dans le cours, on note $w_j = A(j)$ et $x_j = B(j)$. Soit aussi $a_1, \ldots, a_k$ des nouveaux symboles qui ne sont pas dans Σ.
On définit :

- comme dans le cours, la grammaire non-contextuelle $G_A = (S_A, \Sigma \cup \{a_1, \ldots, a_k\}, P_A, S_A)$ par les productions P_A telles que :

$$S_A \to_G w_1 a_1 \;\big|\; \cdots \;\big|\; w_k a_k \;\big|\; w_1 S_A a_1 \;\big|\; \cdots \;\big|\; w_k S_A a_k$$

- la grammaire non-contextuelle $G_{\overline{B}} = (S_B, \Sigma \cup \{a_1, \ldots, a_k\}, P_B, S_B)$ par les productions P_B telles que :

$$S_B \to_G a_1 \overline{x_1} \;\big|\; \cdots \;\big|\; a_k \overline{x_k} \;\big|\; a_1 S_B \overline{x_1} \;\big|\; \cdots \;\big|\; a_k S_B \overline{x_k}$$

  (c'est la grammaire G_B du cours vue dans un miroir)

Soit encore $\bullet$ un nouveau symbole.
On définit la grammaire non contextuelle $G = (\{S, S_A, S_B\}, \Sigma \cup \{a_1, \ldots, a_k, \bullet\}, P \cup P_A \cup P_B, S)$ avec P tel que $S \to_G S_A \bullet S_B$.

Si (A, B) a une solution alors il est facile de voir que la grammaire G engendre un palindrome (on utilise la solution du jeu pour construire le palindrome).

Réciproquement, si G engendre un palindrome w alors w peut se décomposer en $u \bullet \overline{u}$ et clairement on peut construire une solution au jeu (A, B) (on utilise le palindrome pour trouver une solution du jeu).

On a donc montré que PCP se réduit au problème demandé. Comme PCP est indécidable, on en déduit que le problème demandé est aussi indécidable. ∎