

## 1. Diagonalisation prolifique

Montrer que les langages suivants ne sont pas semi-décidables.

1.  $L_1 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \notin L(M_{w \cdot 0})\}$
2.  $L_2 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \cdot 0 \notin L(M_w)\}$  □

**Preuve.**

1. Raisonnons par l'absurde et supposons que  $L_1$  soit semi-décidable. Il existe alors une machine de Turing  $M$  tel que  $L(M) = L_1$ . On sait, d'après l'encodage des MT en binaire, qu'il existe alors  $w \in \{0, 1\}^*$  tel que  $M = M_w$ . D'après la définition de l'encodage, on sait même que  $w$  se termine par un 0 ; il existe  $w' \in \{0, 1\}^*$  tel que  $w = w' \cdot 0$ . On se demande alors si  $w' \in L_1$  ou si  $w' \notin L_1$ .
  - (a) Supposons  $w' \in L_1$ . Par définition de  $L_1$ , cela signifie que  $w' \notin L(M_{w' \cdot 0})$ . C'est-à-dire, puisque  $w = w' \cdot 0$  et  $M_w = M$  que  $w' \notin L(M) = L_1$ . On arrive à une contradiction.
  - (b) Supposons  $w' \notin L_1$ . Par définition de  $L_1$ , on a alors  $w' \in L(M_{w' \cdot 0})$ . Comme  $w = w' \cdot 0$  et  $M = M_w$ , on a donc  $w' \in L(M) = L_1$ . On arrive encore à une contradiction.

L'hypothèse de départ nous amène à une contradiction. On en déduit que  $L_1$  n'est pas semi-décidable.

2. Raisonnons par l'absurde et supposons que  $L_2$  soit semi-décidable. Il existe une machine de Turing  $M$  tel que  $L(M) = L_2$ . Partant de  $M$ , il est facile de construire une machine de Turing  $M'$  tel que  $L(M') = L_2 \cdot 0$ . Par définition,  $L_2 \cdot 0 = \{w \cdot 0 \in \{0, 1\}^* \cdot 0 \mid w \cdot 0 \notin L(M_w)\}$ . D'après le codage des machines de Turing en binaire, il existe  $w \in \{0, 1\}^*$  tel que  $M' = M_w$ . On se demande alors si  $w \cdot 0 \in L_2 \cdot 0$  ou si  $w \cdot 0 \notin L_2 \cdot 0$ .
  - (a) Supposons  $w \cdot 0 \in L_2 \cdot 0$ . Par définition, on a  $w \cdot 0 \notin L(M_w)$ . Comme  $M_w = M'$ , on a donc  $w \cdot 0 \notin L(M') = L_2 \cdot 0$  : contradiction.
  - (b) Supposons  $w \cdot 0 \notin L_2 \cdot 0$ . Par définition, on a alors  $w \cdot 0 \in L(M_w)$ . Comme  $M_w = M'$ , on a donc  $w \cdot 0 \in L(M') = L_2 \cdot 0$  : contradiction.

L'hypothèse de départ nous amène à une contradiction. On en déduit que  $L_2$  n'est pas semi-décidable. ■

## 2. Turing Club

Soit  $L$  un langage sur  $\Sigma$  semi-décidable tel que  $\bar{L}$  est non-semi-décidable. Quelle est la décidabilité du langage  $L' = 0 \cdot L \cup 1 \cdot \bar{L}$  ? □

**Solution.**  $L'$  est non-semi-décidable.

**Preuve.**

Supposons<sup>(\*)</sup>  $L'$  semi-décidable. Par définition il existe donc une machine de Turing  $M$  telle que  $L(M) = L'$ . Il est alors relativement aisé de construire une machine de Turing  $M'$  qui :

1. Remplace le blanc situé avant le mot d'entrée  $w$  par un 1.
2. Puis se comporte comme  $M$  sur le mot  $1w$ .

Par définition  $M'$  accepte  $w$  si et seulement si  $M$  accepte le mot  $1w$ . Si  $M$  accepte le mot  $1w$  cela signifie que  $w \in \overline{L}$ . Donc  $L(M') = \overline{L}$ , une contradiction vu que  $\overline{L}$  est non-semi-décidable. L'hypothèse (\*) est donc fausse. ■