Informatique théorique III
Série 15 solution

Prof. Nestmann, 2005

1. Régularité à gauche (60 min.)

Soit Σ un alphabet.
Si $M = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$ est un AFD, on dira que
– M est *régulier à droite* si :

$$\forall u, v \in \Sigma^* . \widehat{\delta}(q_1, u) = \widehat{\delta}(q_1, v) \Rightarrow (\forall w \in \Sigma^* . \widehat{\delta}(q_1, u \cdot w) = \widehat{\delta}(q_1, v \cdot w)$$

– M est *régulier à gauche* si :

$$\forall u, v \in \Sigma^* . \widehat{\delta}(q_1, u) = \widehat{\delta}(q_1, v) \Rightarrow (\forall w \in \Sigma^* . \widehat{\delta}(q_1, w \cdot u) = \widehat{\delta}(q_1, w \cdot v)$$

Par définition, tout AFD est régulier à droite. Le but de ce problème est de montrer que tout AFD est équivalent à un AFD régulier à gauche.

1. Montrer qu'un AFD n'est pas nécessairement régulier à gauche en considérant $M_0 = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, q_1, \{q_3\})$ l'AFD défini par : C'est-à-dire, donner,

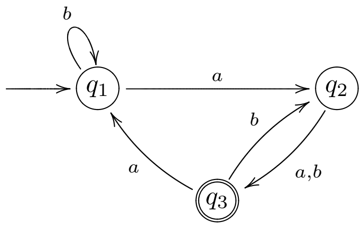


FIG. 1 – L'automate M_0

pour l'automate M_0, deux mots u et v tels que $\widehat{\delta}(q_1, u) = \widehat{\delta}(q_1, v)$ et un mot w tel que $\widehat{\delta}(q_1, w \cdot u) \neq \widehat{\delta}(q_1, w \cdot v)$.

On définit maintenant l'application rg de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg} : \quad & \text{AFD} \to \text{AFD} \\ & (Q, \Sigma, \delta, q_1, F) \mapsto (Q_g, \Sigma, \delta_g, \mathrm{id}_Q, F_g) \end{aligned}$$

avec
– $Q_g = Q \to Q$ est l'ensemble des applications de Q dans Q,
– δ_g est définie par :

$$\begin{aligned} \delta_g :\ & Q_g \times \Sigma \to Q_g \\ & (f, a) \mapsto g :\ Q \to Q \\ & \qquad\qquad\quad q \mapsto \delta(q, a) \end{aligned}$$

– $\mathrm{id}_Q : Q \to Q$ est l'application identité de l'ensemble Q (définie par $\mathrm{id}_Q(q) = q$ pour tout $q \in Q$)
– $F_g = \{f : Q \to Q \mid f(q_1) \in F\}$

2. On a commencé à calculer sur la figure 2 l'automate $\mathrm{rg}(M_0)$ où M_0 est l'automate qui a été défini dans la figure 1. L'ensemble des états accessibles, qui ne sont en fait que ceux qui nous intéressent (comme lors de la déterminisation

des AFD), est représenté sur cette figure. Sont indiquées également quelques transitions.

Pour simplifier la représentation graphique, on a représenté sur cette figure les applications de $\{q_1, q_2, q_3\} \to \{q_1, q_2, q_3\}$ par des triplets (q'_1, q'_2, q'_3) où, si f est la fonction représentée, $q'_1 = f(q_1)$, $q'_2 = f(q_2)$ et $q'_3 = f(q_3)$. Par exemple, $\mathrm{id}_{\{q_1,q_2,q_3\}}$ est représentée par le triplet (q_1, q_2, q_3). Le triplet (q_3, q_1, q_2) représente, quant à lui, l'application $f : \{q_1, q_2, q_3\} \to \{q_1, q_2, q_3\}$ telle que $f(q_1) = q_3$, $f(q_2) = q_1$ et $f(q_3) = q_2$.

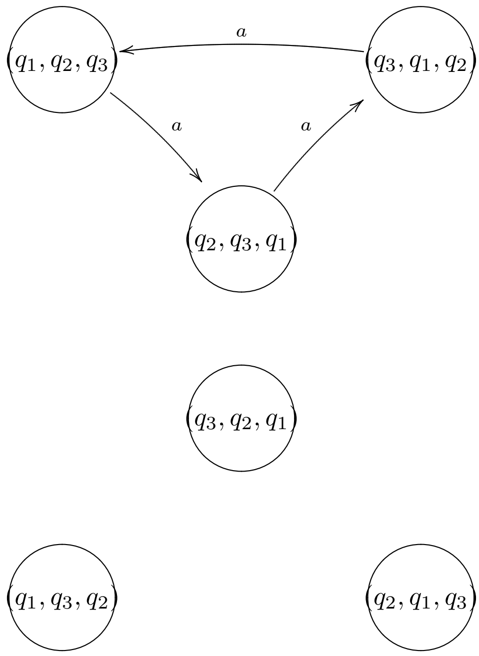


FIG. 2 – L'automate $\mathrm{rg}(M_0)$ (à compléter)

Compléter cette figure en indiquant les transitions manquantes, l'état initial et les états finaux.

3. Soit $M = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$ un AFD et $(Q_g, \Sigma, \delta_g, \mathrm{id}_Q, F_g) = \mathrm{rg}(M)$.

   (a) Montrer que :

   $$\forall u \in \Sigma^* \,.\, \forall f \in Q_g \,.\, \forall q \in Q \,.\, (\widehat{\delta_g}(f, u))(q) = \widehat{\delta}(f(q), u)$$

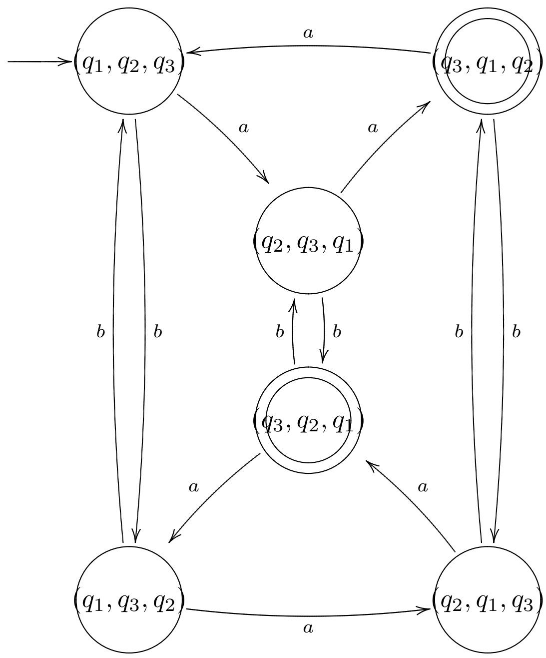
   (b) En déduire que $\mathrm{L}(\mathrm{rg}(M)) = \mathrm{L}(M)$, c'est-à-dire que M et $\mathrm{rg}(M)$ sont équivalents.

   (c) En déduire également que $\mathrm{rg}(M)$ est régulier à gauche.

Solution.

1. Considérer (par exemple) $u = aa$, $v = ab$ et $w = a$.

2.



3. (a) On montre ce résultat par induction sur $u \in \Sigma^*$.
Plus précisément, soit le prédicat $P(u)$ défini par :

$$P(u) : \forall f \in Q_g \,.\, \forall q \in Q \,.\, (\widehat{\delta_g}(f, u))(q) = \widehat{\delta}(f(q), u)$$

On montre par induction sur $u \in \Sigma^*$ que $\forall u \in \Sigma^* : P(u)$.

– Cas de base : $u = \epsilon$.
Soit $f \in Q_g$ et $q \in Q$. Par définition, on a $\widehat{\delta_g}(f, \epsilon)) = f$ et $\widehat{\delta}(f(q), \epsilon) = f(q)$ donc $(\widehat{\delta_g}(f, u))(q) = f(q) = \widehat{\delta}(f(q), u)$. Donc $P(\epsilon)$ est vrai.

– Cas inductif.
Soit $u \in \Sigma^*$ tel que $P(u)$ et soit $a \in \Sigma$. Montrons que $P(u \cdot a)$ est vrai.
Soit $f \in Q_g$ et $q \in Q$. Par définition, $\widehat{\delta_g}(f, u \cdot a) = \delta_g(\widehat{\delta_g}(f, u), a)$. Donc $\widehat{\delta_g}(f, u{\cdot}a)(q) = \delta_g(\widehat{\delta_g}(f, u), a)(q) = \delta(\widehat{\delta_g}(f, u)(q), a)$ (par définition de δ_g).
On a, par l'hypothèse d'induction $P(u)$, $\widehat{\delta_g}(f, u)(q) = \widehat{\delta}(f(q), u)$. Donc $\widehat{\delta_g}(f, u \cdot a)(q) = \delta(\widehat{\delta_g}(f, u)(q), a) = \delta(\widehat{\delta}(f(q), u), a) = \widehat{\delta}(f(q), u \cdot a)$. Donc $P(u \cdot a)$ est vrai.

On conclut par théorème d'induction que $\forall u \in \Sigma^* \,.\, P(u)$, ce qui est le résultat voulu.

(b) Soit $u \in \Sigma^*$. On a

$$\begin{aligned}
u \in \mathrm{L}(\mathrm{rg}(M)) &\Leftrightarrow \widehat{\delta_g}(\mathrm{id}_Q, u) \in F_g && \text{par définition de } \mathrm{L}(\mathrm{rg}(M)) \\
&\Leftrightarrow \widehat{\delta_g}(\mathrm{id}_Q, u)(q_1) \in F && \text{par définition de } F_g \\
&\Leftrightarrow \widehat{\delta}(\mathrm{id}_Q(q_1), u) \in F && \text{d'après (a)} \\
&\Leftrightarrow \widehat{\delta}(q_1, u) \in F && \text{par définition de } \mathrm{id}_Q \\
&\Leftrightarrow u \in \mathrm{L}(M) && \text{par définition de } \mathrm{L}(M)
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{L}(\mathrm{rg}(M)) = \mathrm{L}(M)$.

(c) Soit $u, v \in \Sigma^*$ tels que $\widehat{\delta_g}(\mathrm{id}_Q, u) = \widehat{\delta_g}(\mathrm{id}_Q, v)$. Soit $w \in \Sigma^*$. Montrons que $\widehat{\delta_g}(\mathrm{id}_Q, w \cdot u) = \widehat{\delta_g}(\mathrm{id}_Q, w \cdot v)$.
On veut donc montrer que $\forall q \in Q \,.\, \widehat{\delta_g}(\mathrm{id}_Q, w \cdot u)(q) = \widehat{\delta_g}(\mathrm{id}_Q, w \cdot v)(q)$.
Soit donc $q \in Q$.

$\blacksquare$