

1. Réduction

Déterminer pour chacun des langages suivants, s'il est décidable, semi-décidable mais non décidable, ou non-semi-décidable.

1. $L_1 = \{[M] \mid M \text{ ne s'arrête pour aucun mot}\}$
2. $L_2 = \{[M] \mid M \in \text{MT est totale}\}$
3. $L_3 = \{[M] \mid M \text{ ne s'arrête pas pour au moins un mot}\}$

On pourra utiliser le résultat suivant :

$L'_H = \{[(M, w)] \mid M \text{ ne s'arrête pas pour } w\}$ est non-semi-décidable. □

2. Rice

Utiliser le théorème de Rice pour montrer que les problèmes suivants sont indécidables.

1. Étant donnée une machine de Turing M , est-ce que $L(M) = \emptyset$?
2. Étant donnée une machine de Turing M , est-ce que $L(M)$ est fini ?
3. Étant donnée une machine de Turing M , est-ce que $L(M)$ est un langage régulier ?
4. Étant donnée une machine de Turing M , est-ce que $L(M)$ est un langage algébrique ?

□

3. Indécidabilité¹

Étant donné un alphabet Σ , considérons l'ensemble Υ constitué des langages semi-décidables qui contiennent *au moins* tous les palindromes de Σ^* . En d'autres termes,

$$\Upsilon \triangleq \{L \subseteq \mathcal{L}_0 \mid \text{Pal}(\Sigma^*) \subseteq L\}$$

Démontrez que le problème qui consiste à déterminer si un langage $L \in \mathcal{L}_0$ appartient à Υ n'est pas décidable. Utilisez d'abord le théorème de Rice. Puis redémontrez le résultat par réduction en reformulant le problème comme une propriété à décider sur les machines de Turing.

□

¹Inspiré d'un problème d'examen 2003/2004.