Informatique théorique III
Série 1

Prof. Nestmann, 2004

1. Ensemble des parties

Écrivez les ensembles suivants.
- $\mathcal{P}(\{1,2\})$
- $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1,2\}))$

$\square$

2. Relations et fonctions

Soit A et B deux ensembles quelconques. Montrez qu'il existe une bijection entre
$\mathcal{P}(A \times B)$, l'ensemble des relations sur $A \times B$ et
$A \to \mathcal{P}(B)$, l'ensemble des applications de A dans $\mathcal{P}(B)$.

Procédez de la manière suivante.

1. Commencez d'abord par vous représenter ces deux ensembles.
2. Définissez ensuite une application $\phi : \mathcal{P}(A \times B) \to (A \to \mathcal{P}(B))$ qui associe une fonction à chaque relation. Indice : prenez une relation et essayez de construire une fonction qui « représente » la relation sans perte d'information.
3. Démontrez que ϕ est effectivement bijective.

$\square$

3. Mot miroir

Soit Σ un alphabet. Pour $w \in \Sigma^*$, le mot miroir $\overline{w}$ de w est défini par,

$$\overline{\epsilon} \triangleq \epsilon \qquad (\mathrm{M}_1)$$
$$\overline{a \cdot w} \triangleq \overline{w} \cdot a \qquad (\mathrm{M}_2)$$

On admet, sans le démontrer, que $\forall w \in \Sigma^*, |w| = |\overline{w}|$.

1. Montrez que $\forall u, v \in \Sigma^* : \overline{u \cdot v} = \overline{v} \cdot \overline{u}$
2. En déduire que $\forall w \in \Sigma^* : \overline{\overline{w}} = w$
3. En utilisant (1) donnez la forme des mots w tels que $\overline{w} = w$.

$\square$